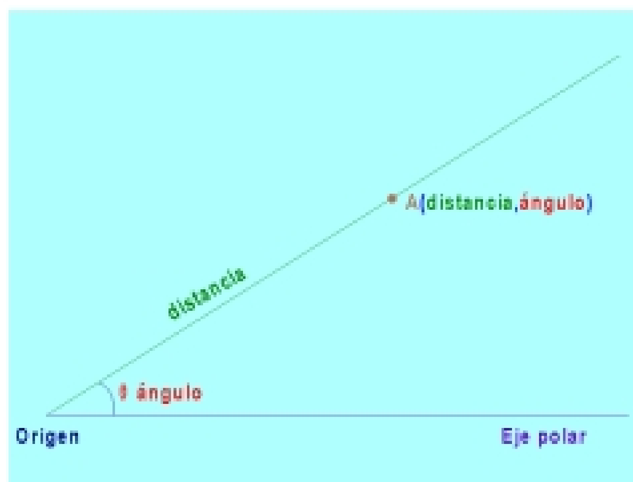
COORDENADAS POLARES

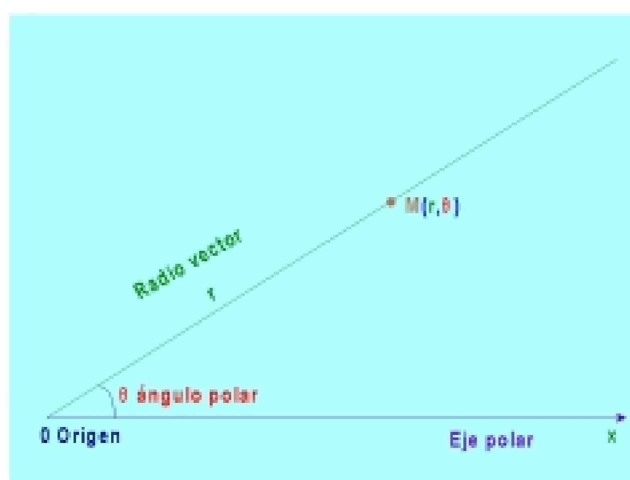
CONTENIDO

Este sistema consiste en señalar un ***punto*** que es el ***origen*** de las coordenadas y a partir de él se señala un segmento de recta horizontal denominado línea inicial o ***eje polar***, en el cual se marca la escala que se desee, para medir distancias. Una vez hecho esto, para indicar la posición de un punto cualquiera del plano, trazamos la ***recta*** desde el ***punto*** en cuestión hasta el ***origen*** del sistema y se mide el ***ángulo*** por el ***eje polar*** y la ***recta***. La medida del ***ángulo*** y de la ***distancia*** del ***punto*** al ***origen*** son las ***coordenadas polares*** del punto.



Lo especificado lo representamos en la ***figura*** adjunta.

1. Coordenadas polares de un punto



Consideremos sobre un plano, un rayo **(0x)** con ***origen*** en el punto **0**. Llamaremos ***eje polar*** al rayo; polo al punto **0**, El ***eje polar*** se representara por **0x**.

Sea **M** un punto arbitrario del plano, como se observa en la ***figura*** adjunta. La ***longitud*** del segmento **0M**, se llamará ***longitud*** del ***radio polar*** del punto **M** y se representará por **r**. El ***ángulo*** que deba rotarse el ***eje polar***, en el

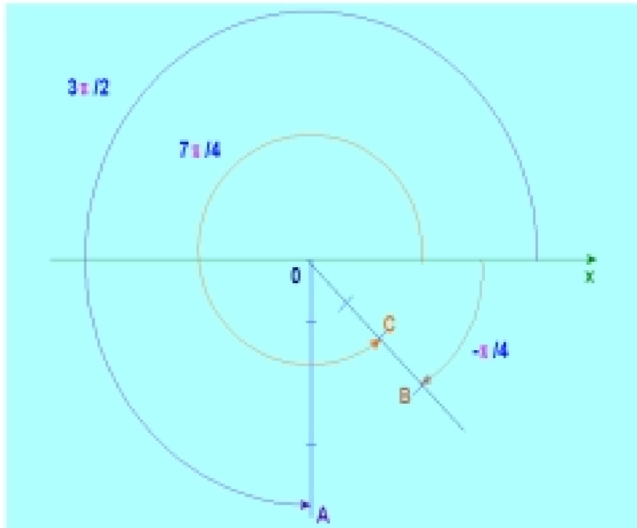
AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**

sentido opuesto a las manecillas del reloj, para hacerlo coincidir con el *radio polar*, **0M** se llamará ***ángulo polar*** del punto **M** y se representará por θ. Si el punto **M** coincide con el polo, **r = 0** y el ángulo θ no tendrá un valor determinado.

El par de números **r** y θ reciben el nombre de ***coordenadas polares*** del punto **M**. Lo denotamos como:

M (r, θ)

El ***radio vector*** es ***positivo***.



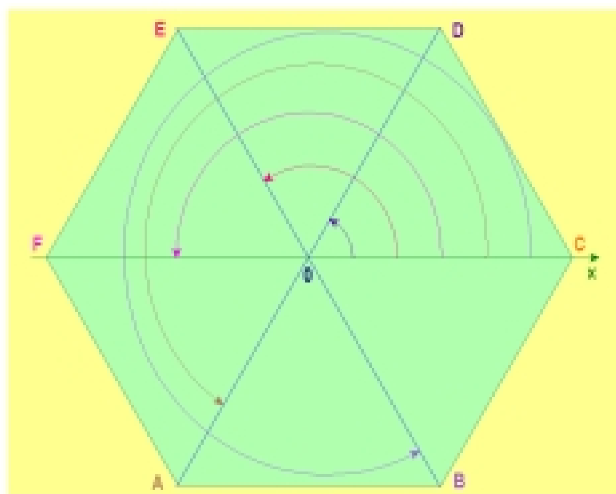
EJEMPLO 1. **Construir** los puntos cuyas ***coordenadas polares*** son:

$$A\left(4,\frac{3\pi}{2}\right);\ B\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)\ y\ C\left(2,\frac{7\pi}{4}\right)$$

SOLUCIÓN

Por lo expuesto, los ***datos*** los llevamos a la ***figura*** adjunta.

EJEMPLO 2. **Determinar** las ***coordenadas polares*** de las ***vértices*** de un ***hexágono*** regular **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, y **F**, tomando como ***polo*** al punto **0**, centro del ***hexágono*** y como ***eje polar*** al rayo $\overline{OC}$, según la ***figura***.



SOLUCIÓN

Tomando $\overline{OC} = 1$

C(1,0), D(1,π/3), E(1,2π/3), F(1,π), A(1,4π/3) y B(1,5π/3)

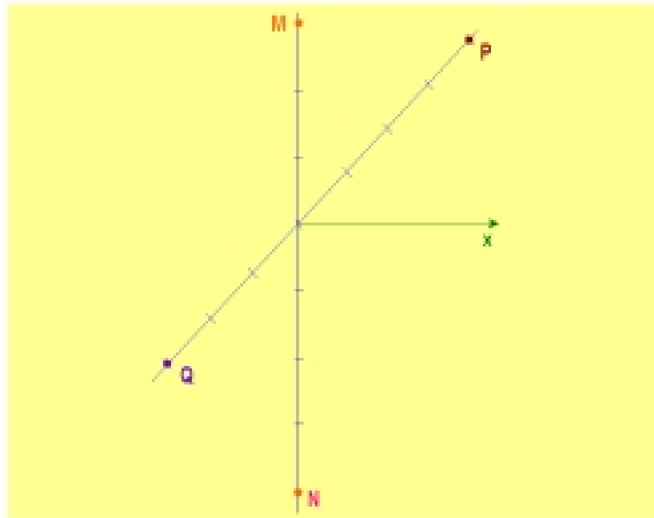
2. Coordenadas polares generalizadas

En la situación de ciertos problemas es conveniente considerar sobre una ***recta*** que pasa por el ***polo***, dos puntos **M** y **N** que se encuentran en diferentes semi-rectas con relación al punto **0**. Como se observa en la ***figura*** siguiente:

En este caso se toma por ***ángulo polar*** de los puntos **M** y **N** el mismo ***ángulo***, y **r**, para el punto **M**, se considerara ***positivo*** y para el punto **N** será ***negativo***.

Las coordenadas θ y **r < 0** se llaman ***coordenadas polares*** generalizadas del punto **N**.

EJEMPLO 3. **Determinar** las ***coordenadas polares*** de los ***puntos*** que se indican en la ***figura*** adjunta:



SOLUCIÓN

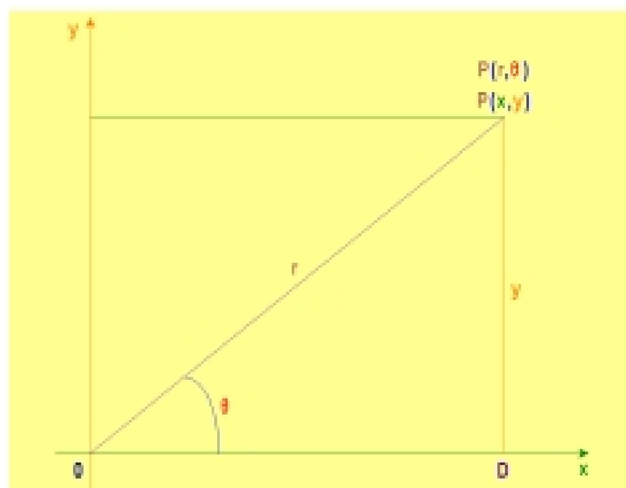
Como el radio vector **r** es ***positivo*** cuando se mide sobre el lado terminal del ***ángulo*** y ***negativo*** cuando se mide sobre la prolongación de este, tendremos que:

De acuerdo a la ***figura***, para los puntos **M**, **N**, **P** y **Q** pueden tomarse como ***coordenadas polares***.

$$M\left(3, \frac{\pi}{2}\right);\ N\left(-4, \frac{\pi}{4}\right),\ P\left(4, \frac{\pi}{4}\right)\ y\ Q\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$$

2.1. Relación entre coordenadas polares y rectangulares de un punto

Para transformar las coordenadas de un punto de un sistema de ***coordenadas rectangulares*** a un sistema de ***coordenadas polares*** o viceversa, hacemos coincidir los orígenes de los dos sistemas y el ***eje polar*** con el eje ***positivo*** de las ***abscisas*** o de las **x**, como se ve en la ***figura*** adjunta en la cual consideramos un punto **P**, cualquiera.



Las coordenadas en ambos sistemas del punto **P** son:

P (x, y) y P (r, φ)

3. Cambio de sistema de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

Para la solución de ciertos problemas es necesario saber como pasar de un sistema de coordenadas a otro. Por ello deduciremos las relaciones necesarias.

De la ***figura*** anterior, se tiene el triángulo rectángulo **0PD** y de acuerdo a la definición de las funciones trigonométricas, obtenemos:

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{y}{r} \quad \therefore \quad \mathbf{y = r\ sen\ \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r} \quad \therefore \quad \mathbf{x = r\cos\varphi}$ ....(2)

Que son las ecuaciones de cambio, para cambiar las coordenadas de un punto o de una ecuación ***cartesiana*** en ***polar*** y viceversa.

Ahora, de acuerdo al teorema de ***Pitágoras*** según la misma ***figura*** nos queda:

$r^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore \quad \mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ ....(3)

Las expresiones anteriores **(1)**, **(2)** y **(3)** son válidas para todos los puntos del plano, es decir, podemos convertir con facilidad las ecuaciones ***rectangulares*** de las curvas en el plano a su forma ***polar*** o viceversa.

3.1 Ejercicios

1. Dadas las ***coordenadas cartesianas*** del punto $\mathbf{P(1, -\sqrt{3})}$, **determinar** las ***coordenadas polares*** del mismo.

SOLUCIÓN

Se sabe que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, sustituyendo las coordenadas conocidas del punto tenemos:

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \;\therefore\; \mathbf{r = 2}$$

Por otra parte se tiene que:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \text{ang sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 300^0 = \frac{5\pi}{3} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\varphi = \frac{5\pi}{3}}$$

Por lo que las ***coordenadas polares*** de **P** son:

$$\mathbf{P\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)}$$

2. Dada la ecuación ***polar*** $\mathbf{r(3 - 2\cos\theta) = 2}$. **Obtener** la ecuación ***cartesiana*** de la curva.

SOLUCIÓN

De la ecuación dada se tiene:

$$3r - 2r\cos\theta = 2$$

Aplicando las ecuaciones de cambio: $\mathbf{x = r\cos\theta}$ y $\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Sustituyendo queda:

$$3\sqrt{x^2+y^2}-2x=2$$
$$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+2$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$9x^2+9y^2=4x^2+8x+4$$

Simplificando y ordenando:

$$\mathbf{5x^2+9y^2-8x-4=0}$$

La ecuación representa a una ***elipse***.

3. **Obtener** la ecuación ***polar*** de la curva cuya ecuación es: $\mathbf{3x+4y+1=0}$.

SOLUCIÓN

Se sabe que $\mathbf{x=r\cos\theta\ ,\ y=r\,sen\,\theta}$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$3(r\cos\theta)+4(r\,sen\,\theta)=-1$$
$$3r\cos\theta+4r\,sen\,\theta=-1$$
$$r\,(3\cos\theta+4\,sen\,\theta)=-1$$

Despejando a **r**:

$$\mathbf{r=\frac{-1}{3\cos\theta+4\,sen\,\theta}}$$

4. **Obtener** la ecuación ***rectangular*** de la curva cuya ecuación es: $\mathbf{r=\dfrac{4}{\cos\theta+1}}$.

SOLUCIÓN

Rearreglando la ecuación dada:

$$r(\cos\theta+1)=4$$
$$r\cos\theta+r=4$$

Pero:

$$x=r\cos\theta$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

Sustituyendo:

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - x$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2 + y^2 = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$$

Despejando:

$$y^2 = 16 - 8x = 8\ (2 - x)$$

Por tanto:

$$\mathbf{y^2 = 8\ (2 - x)}$$

La ecuación representa a la curva de una ***parábola***.

5. **Obtener** la ecuación ***cartesiana*** de la ***línea***: $\mathbf{r(5\ \cos\ \theta + 3\,\text{sen}\ \theta) = 6}$.

SOLUCIÓN

Haciendo las operaciones:

$$5r\ \cos\theta + 3r\,\text{sen}\,\theta = 6$$

Haciendo el cambio sabiendo que:

$x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\theta$

Sustituyendo queda:

$$\mathbf{5x + 3y = 6}$$

La ecuación representa a una ***línea recta***.

6. **Obtener** la ecuación ***polar*** de la ***parábola***, cuya ecuación es: $\mathbf{y^2 = 2px}$

SOLUCIÓN

En la ecuación dada sustituimos las ecuaciones:

$\mathbf{x = r\cos\theta}$
$\mathbf{y = r\,\text{sen}\,\theta}$

Por lo que:

$$r^2\,\text{sen}^2\theta = 2pr\cos\theta$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Simplificando:

$$r\,\text{sen}^2\theta = 2\,p\cos\theta$$

Despejando:

$$r = 2\,p\,\frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} = 2\,p\,\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\,\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Pero:

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \csc\theta \quad \text{y} \quad \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cot\theta$$

Sustituyendo queda:

$$\mathbf{r = 2\,p\csc\theta\cot\theta}$$

7. **Determinar** la nueva ecuación ***polar*** de la curva $r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 8$, referida al mismo ***polo***, pero cuando el ***eje polar*** gira un ***ángulo*** de **45°**.

SOLUCIÓN

Previamente, tenemos que pasar al sistema ***cartesiano*** la ecuación dada para poder hacer el ***giro***.

La ecuación dada puede expresarse como:

$$r\cos\theta\;r\,\text{sen}\,\theta = 8$$

Sustituyendo: $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$:

La ecuación dada tiene la forma:

$\mathbf{x\,y = 8}$ ....**(1)**

Las ecuaciones de ***giro*** en este caso son, sabiendo que:

$$\text{sen}\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = x'\cos 45° - y'\,\text{sen}\,45° = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x'\,\text{sen}\,45° + y'\cos 45° = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = 8$$

Haciendo operaciones:

$$\frac{x'^{2} - y'^{2}}{2} = 8$$

$$\mathbf{x'^{2} - y'^{2} = 16}$$

Esta es la ecuación ***transformada***, pero en sistema ***cartesiano***; habrá que regresar nuevamente a ***polares*** para obtener la solución definitiva. Al aplicar las correspondientes ecuaciones de cambio, resulta:

$$r'^{2}\cos^{2}\theta' - r'^{2}\,\text{sen}^{2}\theta' = 16$$

$$r'^{2}(\cos^{2}\theta' - \text{sen}^{2}\} = 16$$

Pero se sabe que: $\cos^{2}\theta' - \text{sen}^{2}\theta' = \cos 2\theta'$. Por tanto:

$$r'^{2}\cos\ 2\ \theta' = 16$$

$$r'^{2} = 16\frac{1}{\cos\ 2\ \theta'} = 16\sec\ 2\ \theta'$$

Sabiendo que: $\frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta$

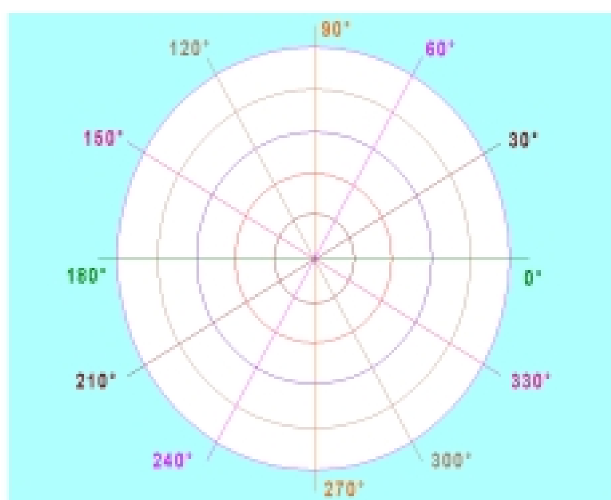
Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros se tiene:

$$\mathbf{r' = \pm 4\sqrt{\sec 2\theta'}}$$

Que es la nueva ecuación ***polar***.

4. Trazado de una curva dada su ecuación polar.

Para localizar puntos o para bosquejar las gráficas, se hace en papel ***coordenado polar***, que se construye de la siguiente forma:



A partir de un punto que es el ***polo***, se trazan ***círculos*** concéntricos igualmente espaciados. Los puntos situados sobre el lado terminal del ***ángulo*** corresponden a valores ***positivos*** de las ***distancias*** y los puntos situados sobre la prolongación del lado terminal del ***ángulo***

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

serán para los valores ***negativos*** de las ***distancias***, como se muestra en la ***figura*** anterior.

Para graficar una ecuación ***polar***, procedemos igualmente que con las ecuaciones ***cartesianas***, dando valores al ángulo θ entre **0°** y **360°**, haciendo uso de preferencia del papel ***coordenado polar***.

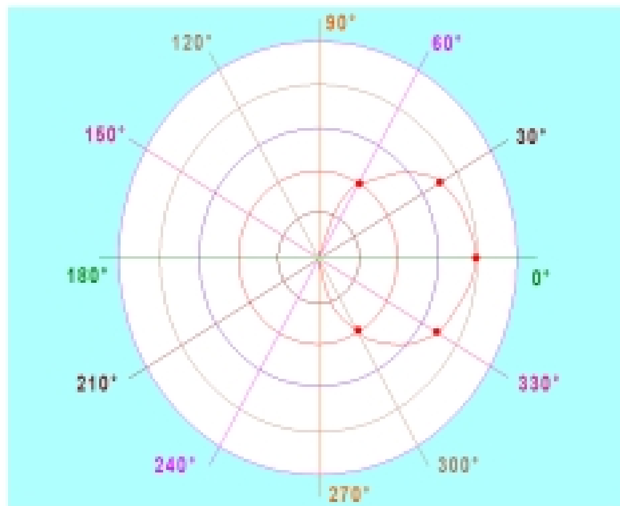
EJEMPLO 1. **Trazar** la curva cuya ecuación ***polar*** es: $r = 8 \cos \theta$.

SOLUCIÓN

Se hacen las operaciones para cada valor de θ según la ecuación. Para obtener las correspondientes a **r**, obteniéndose la siguiente tabla de tabulación

θ	r
$0^0 = 0^0$	8
$\pi/6 = 30^0$	$4\sqrt{3} = 6.9$
$\pi/3 = 60^0$	4
$\pi/2 = 90^0$	0
$2\pi/3 = 120^0$	-4
$5\pi/6 = 150^0$	$-4\sqrt{3} = -6.9$
$\pi = 180^0$	-8

La ***figura*** siguiente muestra los resultados gráficos obtenidos.



EJEMPLO 2. **Trazar** la curva llamada ***cardiode***, cuya ecuación ***polar*** es: $r = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCIÓN

Para la efectuar las operaciones haremos **a = 4**.

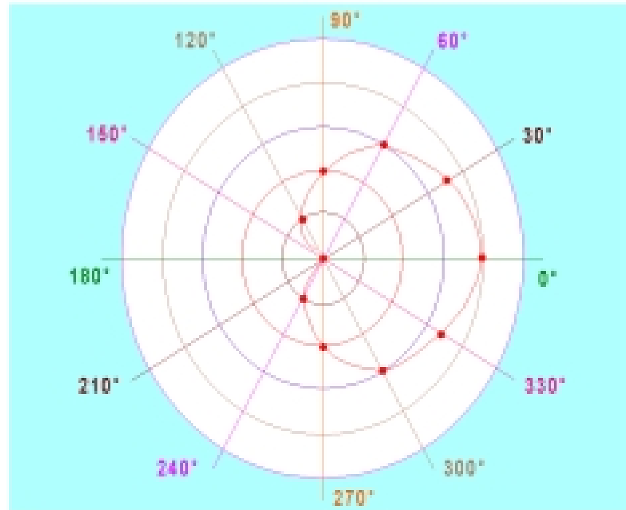
Procediendo en forma ordenada, asignando los valores al ángulo θ, partiendo de 0^0 y aumentando de 30^0 en 30^0. Efectuando las operaciones indicadas por la ecuación dada para cada uno de los valores del ***ángulo***.

De esta manera se tiene la siguiente tabla de tabulación.

AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**

θ	r
0^0	$a(1+1)=4(2)=8$
$\pi/6 = 30^0$	$a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4(1.86)=7$
$\pi/3 = 60^0$	$a\left(1+\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{3}{2}\right)=6$
$\pi/2 = 90^0$	$a(1+0)=4(1)=4$
$2\pi/3 = 120^0$	$a\left(1-\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)=2$
$5\pi/6 = 150^0$	$a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4(0.13)=0.5$
$\pi = 180^0$	$a(1-1)=4(0)=0$
$3\pi/2 = 270^0$	$a(1+0)=4(1)=4$
$2\pi = 360^0$	$a(1+1)=4(2)=8$

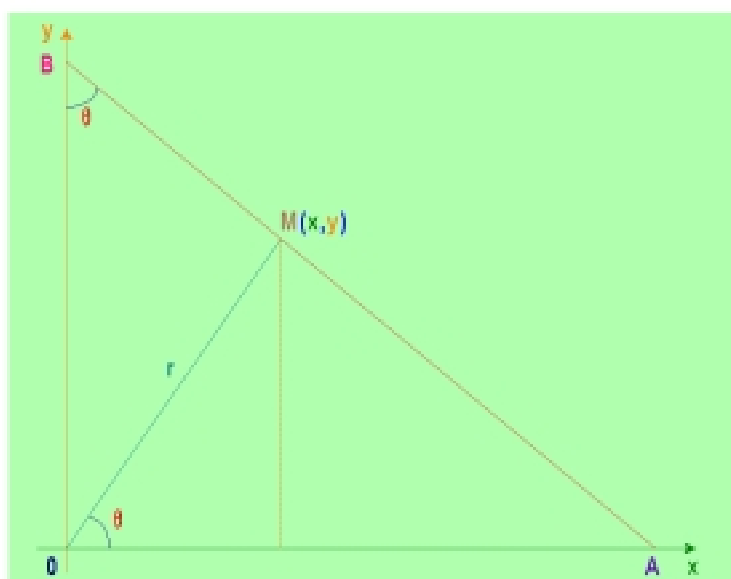
La siguiente ***figura*** muestra los resultados gráficos obtenidos.



EJEMPLO 3. Un segmento de longitud constante **a** se desplaza con sus extremos sobre los lados de un ***ángulo recto***. Del ***vértice*** de este ***ángulo*** se traza la ***perpendicular*** del segmento dado. **Encontrar** el ***lugar geométrico*** de las bases de estas ***perpendiculares***.

SOLUCIÓN

Según el enunciado tenemos la ***figura*** adjunta:



La ecuación del lugar geométrico dado puede establecerse fácilmente en un sistema de coordenadas ***polares*** como se puede ver en la ***figura*** adjunta.

Sea la longitud, $\overline{AB} = 2a$ y **M** en un punto cualquiera del ***lugar geométrico***.

Del triangulo **0MA** se tiene:

$r = \overline{0A}\cos\theta$ (1)

AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**

Del triangulo **0AB** se tiene:

$\overline{0A} = \overline{AB}\,\text{sen}\,\theta = 2\,a\,\text{sen}\,\theta$

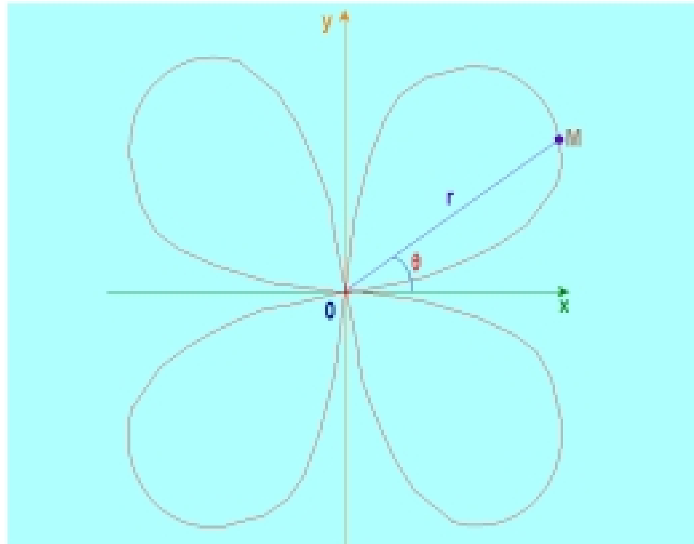
Por lo tanto, sustituyendo en **(1)**:

$r = 2\,a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

Luego:

$\mathbf{r = a\,sen\,2\theta}$

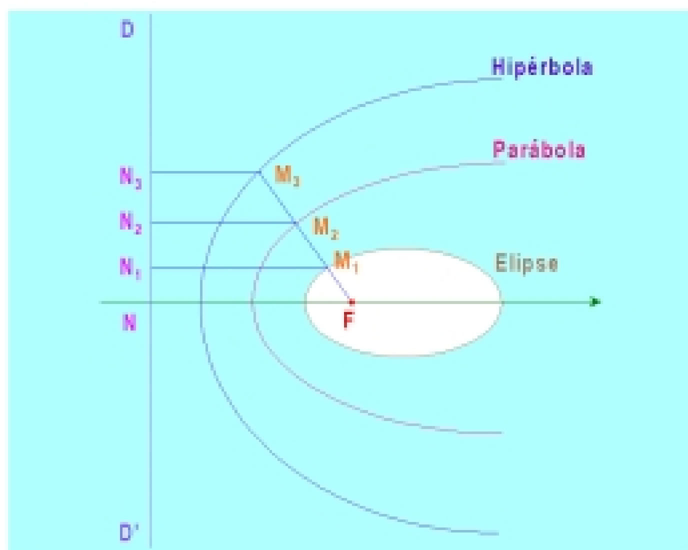
Estudiando la dependencia de **r** con respecto a **θ** puede afirmarse que la curva buscada tiene la forma que se muestra en la ***figura*** adjunta.



Esta curva se llama ***rosa de cuatro pétalos***.

5. Ecuación de las curvas de segundo grado en coordenadas polares

Hemos visto que la ***elipse***, la ***hipérbola*** y la ***parábola*** tienen una propiedad común. Son el ***lugar geométrico*** de los puntos para los cuales la relación entre su distancia **a** un punto **F** (***foco***) y su distancia a una recta dada (***directriz***) es igual a la ***excentricidad*** de la curva como se ve en la ***figura*** adjunta:



Dicha propiedad común permite deducir, para las **tres** curvas una ecuación general en el sistema de coordenadas ***polares***.

Según la ***figura***:

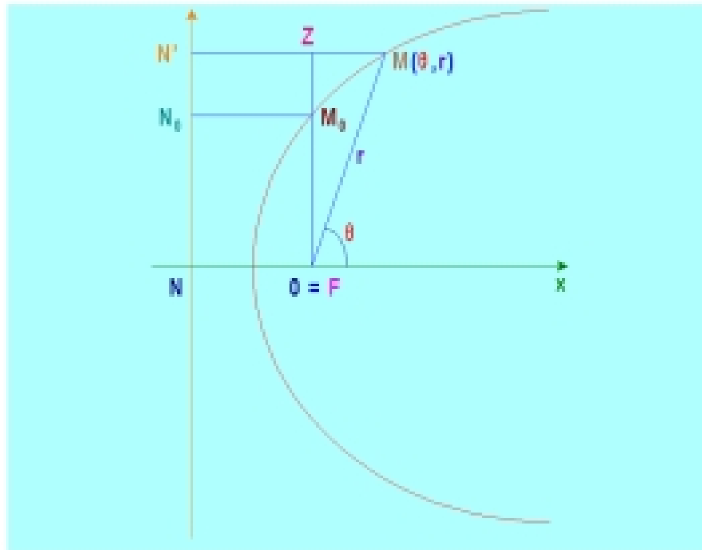
$$\frac{\overline{FM_1}}{\overline{M_1N_1}} = e < 1 \quad \text{ELIPSE}$$

$$\frac{\overline{FM_2}}{\overline{M_2N_2}} = e = 1 \quad \text{PARÁBOLA}$$

$$\frac{\overline{FM_3}}{\overline{M_3N_3}} = e > 1 \quad \text{HIPÉRBOLA}$$

Considerando, según la ***figura*** anterior, que **F** es el ***foco*** de la izquierda de la ***elipse***, o el *foco* de la *parábola*, o el *foco* de la rama derecha de la *hipérbola*.

Ahora tomando el foco **F** como el polo de un sistema *polar* de coordenadas, y sea **N** el punto de *intersección* de la *directriz* con la recta $\overline{FN}$ que pasa por el punto **F** y es *perpendicular* a la *directriz*, como se ve en la *figura* adjunta:



En la *figura* tenemos, como *eje polar* el rayo $\overline{FX}$ y su prolongación $\overline{FN}$. Sea M_0 el punto de *intersección* de la *perpendicular* al *eje polar* en el punto **F** con la curva.

Representemos al segmento $\overline{FM_0}$ por **P**.

Es decir: $\overline{FM_0} = P$, al que llamaremos *parámetro focal*.

Sea **M(θ, r)** un punto cualquiera de la curva. De acuerdo a la propiedad tenemos:

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{MN'}} = e \quad \text{..................(1)}$$

$$\frac{\overline{FM_0}}{\overline{M_0N_0}} = e \quad \text{..................(2)}$$

De la *segunda* igualdad tenemos, si sustituimos:

$$\overline{FM_0} = P$$

$$\frac{P}{\overline{M_0N_0}} = e \quad \therefore \quad \overline{M_0N_0} = \frac{P}{e}$$

Se observa en la *figura* que:

$$\overline{MN'} = \overline{N'Z} + \overline{ZM}$$

Pero: $\overline{N'Z} = \overline{M_0N_0}$

Por lo que:

$$\overline{MN'} = \overline{M_0N_0} + \overline{ZM} = \frac{P}{e} + \overline{ZM} \quad \text{..................(3)}$$

En el triangulo rectángulo:

$$\cos\theta = \frac{\overline{ZM}}{r} \quad \therefore \quad \overline{ZM} = r\cos\theta$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Sustituyendo este valor en (3).

$$\overline{MN'} = \frac{P}{e} + r\cos\theta$$

Sustituyendo los valores de $\overline{FM}$ y $\overline{MN'}$ en la primera igualdad (1) tenemos:

$$\frac{r}{\frac{p}{e} + r\cos\theta} = e$$

Despejando a **r**:

$$r = e\left(\frac{P}{e} + r\cos\theta\right) = P + e\,r\cos\theta$$

$$r\left(1 - e\cos\theta\right) = P$$

De donde:

$$\mathbf{r = \frac{P}{1 - e\cos\theta}} \quad \text{...} \quad \mathbf{I}$$

1. Si **e < 1** la ecuación define una elipse. Mediante ella se obtienen todos los puntos de la ***elipse*** haciendo variar **θ** de **0** a **2π**.
2. Si **e = 1** la ecuación nos define una ***parábola***, haciendo variar **θ** de **0** a **2π**
3. Si **e > 1**, la ecuación nos define una ***hipérbola*** para los ángulos **θ** que cumplan:

$$\theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$$

Donde $2\theta_0$ es el ángulo entre las ***asíntotas***, o sea, $\tan\theta_0 = \frac{b}{a}$ adquiere valores positivos para **r** ya que no es difícil demostrar que para todos estos ángulos **1 - e cos θ > 0**. A estos valores de **θ** y **r** corresponderán puntos de la rama derecha de la ***hipérbola***.

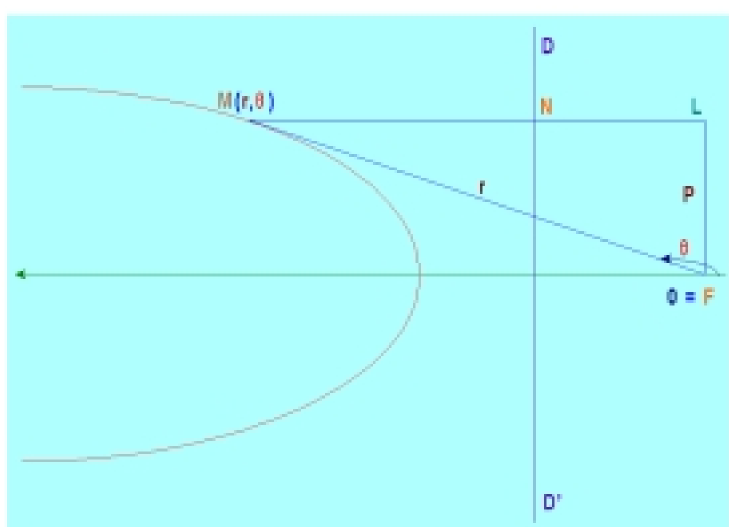
Para ángulos **θ** tales que:

$$-\theta_0 < \theta < \theta_0$$

La ecuación **I** dará valores ***negativos*** de **r.**

Demostraremos que, si en este caso se emplean coordenadas ***polares*** se obtienen los puntos de la rama izquierda de la ***hipérbola***.

Deduciremos la ecuación de la rama izquierda de la ***hipérbola***, considerando **r > 0**, y la **figura** adjunta:



De acuerdo a la propiedad se tiene la relación:

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{MN}} = e \quad \text{...} (1)$$

Donde, observando la ***figura*** anterior:

$$\overline{FM} = r \quad \text{...} (2)$$

$$\overline{MN} = \overline{ML} - \overline{NL} \quad \text{...} (3)$$

Según el triangulo rectángulo **FML**.

$$-\cos\theta = \frac{\overline{ML}}{r} \quad \therefore \quad \overline{ML} - r\cos\theta \quad \text{...} (4)$$

Por la propiedad de las ***directrices*** de la ***hipérbola*** que dice:

La relación entre la distancia de un punto cualquiera de la ***hipérbola*** a un ***foco*** y la ***distancia*** de ese punto a la ***directriz*** correspondiente es una ***cantidad constante*** igual a la ***excentricidad***, aplicada en este caso se tiene que:

$$\frac{P}{\overline{NL}} = e \quad \therefore \quad \overline{NL} = \frac{P}{e} \quad \text{...} (5)$$

Sustituyendo **(4)** y **(5)** en **(3)** queda:

$$\overline{MN} = -r\cos\theta - \frac{P}{e} \quad \text{...} (6)$$

Según **(1)**, sustituyendo **(2)** y **(6)** se tiene:

$$\frac{r}{-r\cos\theta - \frac{P}{e}} = e$$

Despejando:

$$r = e\left(-r\cos\theta - \frac{P}{e}\right) = -e\,r\cos\theta - P$$

$$r + e\,r\cos\theta = P$$

$$r\left(1 + e\cos\theta\right) = P$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \quad \text{...} \mathbf{II}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Para poder obtener que **r > 0** es necesario que:

$\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0$

Así pues, la ecuación **II** será la ecuación de la ***rama izquierda*** de la ***hipérbola*** si en ella seleccionamos **θ** dentro del intervalo indicado.

EJEMPLO 1. **Hallar** la curva determinada por la ecuación $r = \frac{144}{13 - 5\cos\theta}$ y escribir su ecuación ***canónica***.

SOLUCIÓN

Llevando la ecuación dada a la forma **I**.

$$r = \frac{P}{1 - e\cos\theta}$$

Dividiendo numerador y denominador entre **13** tenemos:

$$r = \frac{\frac{144}{13}}{1 - \frac{5}{13}\cos\theta}$$

De esta ecuación vemos que:

$$e = \frac{5}{13} < 1$$

Por lo que la curva será una ***elipse***

Para encontrar su ecuación es necesario conocer los ***semi - ejes*** **a** y **b**.

Como el parámetro ***P*** de la curva es:

$$P = \frac{144}{13} \text{ y } P = \frac{b^2}{a} \quad ; \quad e = \frac{c}{a}$$

Resulta:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{144}{13} \quad ; \quad \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

Además se sabe la relación para la ***elipse***

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Como:

$a = 13 \quad \therefore \quad \mathbf{a^2 = 169}$

$\mathbf{b^2 = 144} \quad \therefore \quad b = 12$

Por lo que la ecuación ***canónica*** de la ***elipse*** es:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

EJEMPLO 2. Se tiene la ecuación de la ***hipérbola***: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **Establecer** su ecuación en ***coordenadas polares*** sabiendo que el ***eje polar*** coincide en ***dirección*** y ***sentido*** con la parte ***positiva*** del eje **0x** y que el ***polo*** se encuentra en el ***foco*** derecho de la ***hipérbola***.

SOLUCIÓN

La ***hipérbola*** en el sistema de ***coordenadas polares*** tendrá por ecuación:

$$r = \frac{P}{1 - e\cos\theta} \quad \text{..................} \quad \text{I}$$

Por lo que es necesario encontrar los valores de **e** y **P**.

De la ecuación dada tenemos:

$$a^2 = 16 \quad \therefore \quad \mathbf{a = 4}$$
$$b^2 = 9 \quad \therefore \quad \mathbf{b = 3}$$

Pero:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \therefore \quad \mathbf{c^2} = a^2 + b^2 = 16 + 9 = \mathbf{25}$$

Por lo tanto.

c = 5

De esta manera.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$
$$P = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$$

Sustituyendo valores en **I**, la ecuación de la ***hipérbola*** en ***coordenadas polares*** será:

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\theta} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{4 - 5\cos\theta}{4}}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{r = \frac{9}{4 - 5\cos\theta}}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Nombre de archivo:	coordenadas polares	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	XI	
Asunto:		
Autor:	Pablo Fuentes Ramos	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	11/04/02 12:12 P.M.	
Cambio número:	61	
Guardado el:	19/06/02 10:21 A.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	1,416 minutos	
Impreso el:	19/06/02 10:22 A.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	17
	Número de palabras:	2,309 (aprox.)
	Número de caracteres:	13,162 (aprox.)